**1.1 Lze určit maximální počet hran obyčejného (resp. prostého, resp. obecného)**

**neorientovaného grafu o n uzlech ?**

**Řešení:**

U obecného ano. Spojujeme každý uzel s všemi ostatními (tzn. Odečítáme 1). Pokud to děláme pro n uzlů, získáme tak n\*(n-1) hran, nicméně v tomto jsou všechny hrany započítány dvakrát, takže ještě vydělíme dvěma.

U prostého ano. Obecný narozdíl od prostého obsahuje smyčky, takže připočteme n jakožto poček smyček v grafu o n uzlech.

U obecného ne – rovnoběžnými hranami můžeme navýšit počet hran na libovolně velké číslo.

1.2. Jaká je role incidence v definici neorientovaného grafu ?

**Řešení:**

Incidence v neorientovaném grafu je neorientovaná dvojice uzlů, které daná hrana spojuje. V neorientovaném grafu je incidence vlastně nadbytečná neboť “kopíruje” množínu hran (ve smyslu neusp. dvojic).

1.3. Kolik různých faktorů má neorientovaný graf o m hranách a n uzlech ?

**Řešení:**

Faktor neorientovaného grafu o m hranách a n uzlech obsahuje všechny uzly a podmnožinu hran původního grafu, takže pro množství těchto faktorů budou řídící hrany a jejich výběr. Neorientovaný graf má m nad 0 faktorů s 0 hranami, m nad 1 faktorů s 1 hranou, m nad 2 … m nad m faktorů s m hranami. Tento součet nám dává podle binomické věty součet 2^m (dva na mtou).

**1.4.** **Kolik různých faktorů má úplný graf Kn ?**

**Řešení:**

Graf Kn má m nad 0 faktorů s 0 hranami, m nad 1 faktorů s 1 hranou, m nad 2 … m nad m faktorů s m hranami. Tento součet nám dává podle binomické věty součet 2^m (dva na mtou). Z vzorce pro maximální počet hran v obyčejném grafu dostaneme počet hran v grafu Kn, který dosadíme pro náš obecný případ. **Výsledek:** 2^(n\*(n-1)/2)

1.5. Který graf o n uzlech má pouze jeden faktor ?

Takový, který nemá žádnou hranu – jediný faktor je samotný graf(vidno z vzorce z příkladu 1.3.).

1.6. Charakterizujte podgraf úplného grafu Kn indukovaný libovolnou podmnožinou jeho

uzlů.

Tento podgraf je tvořen onou podmnožinou hran a všemi uzly, do nichž vede alespoň jedna hrana.

1.7. **Zvažte pravdivost tvrzení:**

**Je-li graf G1 podgrafem grafu G , pak existuje taková podmnožina uzlů U1 , že**

**G1 je podgrafem indukovaným touto podmnožinou uzlů.**

Tvrzení neplatí. Pokud si vezmeme G jako graf Kn a G1 jako faktor s 0 hranami, tak U by byla množina uzlů grafu G1, která by mi ale nagenerovala alespoň jednu hranu (vlastně o dost vice hran).

1.8. **Zvažte pravdivost tvrzení:**

**Je-li graf G1 podgrafem grafu G , pak existuje taková podmnožina hran H1 , že**

**G1 je podgrafem indukovaným touto podmnožinou hran.**

Tvrzení neplatí. Najdeme si protipříklad stejně jako v minulém případě. Tentokráte nedokážeme nalézt množinu hran, která by nám naindukovala uzly grafu G1 a zároveň byla podmnožinou prázdné množiny.

1.9. **Nechť G1, resp. G2 je podgraf grafu G indukovaný podmnožinou uzlů U1, resp.**

**U2. Za jakých podmínek bude platit, že G1** **G2 je roven podgrafu**

**indukovanému podmnožinou uzlů U1** **U2 ?**

G1 = graf indukovaný množinou uzlů U1

G2 = graf indukovaný množinou uzlů U2

Pokud pro každý uzel u naležící U1, ale nenáležící U2 neexistuje hrana h, která by spojovala u a uzel v: v náležící U2**.**

1.10. **Kolik neizomorfních faktorů má úplný graf K4 (K5) ?**

Graf K4 má 1 faktor s 0 hranami, 1 s jednou, 2 s dvěmi, 3 s třemi (jednoduchí na nakreslení). Vybírání 4 z 6 je početně to samé jako vybíraní 2 (základní vlastnosti z kombinatoriky). 5/6 = 1/6, 6/6=0/6. Takže K4 má 11 faktorů.

Úplně stejnou logikou spočítáme počet faktorů grafu K5, který je roven 2 \* (1+1+2+3+3+5) = 30.

1.15. **Může být graf se souborem stupňů (1,1,1,1,1,1,1,3,4) stromem ?**

Ne, nemůže. Při konstrukci grafu s tímto souborem můžeme napojit uzel s stupněm 3 na uzel s stupněm 4, tím jsme našli 1 souseda pro každého. Zbylých 6 uzlů nenapojíme (3-1+4-1) hranami, aby graf zůstal spojitý, což je jedna z podmínek stromu.

**1.18. Nalezněte příklady dvou neizomorfních obyčejných grafů se shodným souborem**

**stupňů (1, 1, 2, 2, 3, 3).**

**1----3---2**

**| |**

**| |**

**1----3 --2**

**1----3---2**

**\ |**

**\|**

**1 -- 2 -- 3**

1.20 **1.20 Mějme graf G =** 〈**H,U**〉**a libovolnou podmnožinu jeho uzlů A** **U. Označme jako**

**B množinu sousedů uzlů z množiny A: B=****(A). Lze tvrdit, že platí** **(B) = A ?**

Nelze, pokud existuje bod z množiny A, který nemá soused z množíny B

2.2. **Nechť G je obyčejný graf s n uzly. Stanovte podmínky pro počet jeho hran, které**

**zaručí, že**

**a) určitě není souvislý**

**b) určitě je souvislý**

1. K tvorbě souvislého grafu potebujeme snížit počet component o n-1 spojováním, takže pokud přidáme jen n-ě hran, tak získáme nejméně dvě komponenty.
2. Izolujeme jeden bod a nalezneme počet hran pro úplný graf s n-1 uzly. (n-1)\*(n-2)/2 hran.